

# Frenet-Serretove formule

Triedar  $(\vec{T}, \vec{n}, \vec{b})$  zove se prirodni triedar krive  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ , odnosno  $\vec{r} = \vec{r}(s)$ . On se mijenja od tačke do tačke krive. Tu promjenu opisuju Freneovi (Frenet) obrasci:

$$\frac{d\vec{T}_0}{ds} = K \vec{n}_0 \quad \frac{d\vec{n}_0}{ds} = -K \vec{T}_0 + \frac{1}{T} \vec{b}_0$$

$$\frac{d\vec{b}_0}{ds} = -\frac{1}{T} \vec{n}_0$$

gdje je  $K$  krivina krive,  
a  $\frac{1}{T}$  torzija krive,

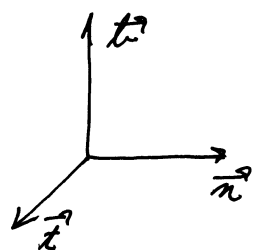
pri tome se torzija krive  $\frac{1}{T}$  računa po formuli

$$\frac{1}{T} = - \frac{\dot{\vec{r}} (\ddot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}})}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2}$$

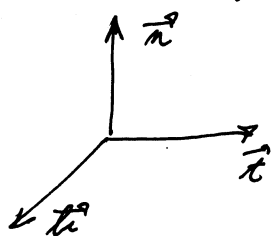
Često se upotrebljava i oznaka  $-\tau = \frac{1}{T}$  za torziju.

# Neka je  $(\vec{T}, \vec{n}, \vec{b})$  prirodni triedar krive  $\vec{r}$  parametrizovane dužinom luka  $\vec{r} = \vec{r}(s)$ , gdje su  $\vec{T}, \vec{n}$  i  $\vec{b}$  jedinični vektori koji zadovoljavaju Frenetove jednačine. Izračunati (tačnije pojednostaviti) izraz  $\vec{n} \times \frac{d\vec{n}}{ds}$  (riješiti se vektorskog proizvoda).

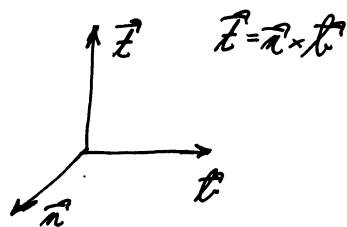
Rj. Za prirodni triedar znamo da vrijedi:



$$\vec{b} = \vec{T} \times \vec{n}$$



$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{T}$$



$$\vec{T} = \vec{n} \times \vec{b}$$

Iz ova slijedi  $-\vec{b} = \vec{n} \times \vec{T}$ ,  $-\vec{n} = \vec{T} \times \vec{b}$ ;  $-\vec{T} = \vec{b} \times \vec{n}$ .

Iz Frenetovih formula  $\frac{d\vec{n}}{ds} = -k\vec{T} + \tau\vec{b}$  gdje je  $k$  krivina krive, a  $\tau$  torzija krive.

$$\vec{n} \times \frac{d\vec{n}}{ds} = \vec{n} \times (-k\vec{T} + \tau\vec{b}) = -k(\vec{n} \times \vec{T}) + \tau(\vec{n} \times \vec{b}) =$$

$$= k\vec{b} + \tau\vec{T}$$

traženo  
rješenje

Ⓝ Napisati Freneove obrasce za krivu

$$\vec{r} = a \cos t \vec{i} + a \sin t \vec{j} + b t \vec{k}$$

f. Freneovi obrasce su <sup>za krivu  $\vec{r} = \vec{r}(s)$</sup>   $\sqrt{\frac{d\vec{t}_0}{ds}} = K \vec{n}_0$ ,  $\frac{d\vec{n}_0}{ds} = -K \vec{t}_0 - \frac{1}{\tau} \vec{b}_0$

i  $\frac{d\vec{t}_0}{ds} = \frac{1}{\tau} \vec{n}_0$  gdje je  $K$  krivina krive, a  $\frac{1}{\tau}$  torzija krive.

Torzija krive  $\frac{1}{\tau}$  se računa po formuli  $\frac{1}{\tau} = - \frac{\vec{r} (\vec{r} \times \ddot{\vec{r}})}{|\vec{r} \times \ddot{\vec{r}}|^2}$ ,

a krivinu krive možemo izračunati po formuli  $K = \frac{|\ddot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\ddot{\vec{r}}|^3}$ .

$$\vec{r} = (a \cos t, a \sin t, b t)$$

$$\dot{\vec{r}} = (-a \sin t, a \cos t, b)$$

$$\ddot{\vec{r}} = (-a \cos t, -a \sin t, 0)$$

$$\ddot{\vec{r}} = (a \sin t, -a \cos t, 0)$$

$$\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a \sin t & a \cos t & b \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \end{vmatrix} = (a b \sin t, -a b \cos t, a^2)$$

$$|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2 = a^2 b^2 \sin^2 t + a^2 b^2 \cos^2 t + a^4 = a^2 b^2 + a^4 = a^2 (b^2 + a^2)$$

$$|\dot{\vec{r}}|^2 = \dot{\vec{r}}^2 = a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2 = a^2 + b^2$$

$$K = \frac{a \sqrt{b^2 + a^2}}{(a^2 + b^2) \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

$$\dot{\vec{r}} (\ddot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}) = \begin{vmatrix} -a \sin t & a \cos t & b \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \\ a \sin t & -a \cos t & 0 \end{vmatrix} = b (a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t) = a^2 b$$

$$\frac{1}{T} = - \frac{a^2 b}{a^2 (a^2 + b^2)} = - \frac{b}{a^2 + b^2}$$

Traženi Frenetovi obrasci su

$$\frac{d\vec{T}_0}{ds} = \frac{a}{a^2 + b^2} \vec{n}_0$$

$$\frac{d\vec{n}_0}{ds} = - \frac{a}{a^2 + b^2} \vec{T}_0 - \frac{b}{a^2 + b^2} \vec{b}_0$$

$$\frac{d\vec{b}_0}{ds} = - \frac{b}{a^2 + b^2} \vec{n}_0$$

⊕ Vektor položaja pokretne tačke dat je kao f-ja luka  
 $s: \vec{r} = s\vec{a} + \vec{a} \times \vec{A}(s)$ , gdje je  $\vec{a}$  konstantan  
vektor  $|\vec{a}| < 1$ , a  $\vec{A}(s)$  diferencijabilna vektorska f-ja.  
Dokazati da je odnos krivine i torzije konstantan.

1. Jedinичne vektore  $\vec{t}_0, \vec{n}_0$  i  $\vec{b}_0$  u ovom reditku ćemo označiti sa  $\vec{t}, \vec{n}$   
2. Znamo da je  $\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds}$  iz čega slijedi da je  $\vec{t} \perp \vec{b}$ .

$$\vec{t} = \vec{a} + \vec{a} \times \frac{d\vec{A}}{ds}$$

Iz Freneovih obrazaca znamo da je

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = K\vec{n} \quad \text{pa je} \quad K\vec{n} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \vec{a} \times \frac{d^2\vec{A}}{ds^2}$$

pa slijedi da je

$$\vec{t} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{a} + \left(\vec{a} \times \frac{d\vec{A}}{ds}\right) \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2, \quad \vec{n} \cdot \vec{a} = 0$$

Znači,  $\vec{a}$  leži u ravni određenoj vektorima  $\vec{t}$  i  $\vec{n}$ ,  
pa je (ako su  $\beta$  oznacimo  $\angle(\vec{b}, \vec{a})$  a sa  $\alpha$   
ugao između  $\angle(\vec{t}, \vec{a})$ ) kako je  $\vec{t} \perp \vec{b}$

$$\beta = \angle(\vec{b}, \vec{a}) = \frac{\pi}{2} - \angle(\vec{t}, \vec{a}) = \frac{\pi}{2} - \alpha$$



Diferencirajmo jednakost  $\vec{n} \cdot \vec{a} = 0$ :

$$\frac{d\vec{n}}{ds} \cdot \vec{a} = 0$$

Ako uvedemo oznaku

$$-\frac{1}{r} = \tau$$

Prema Freneovim obrazacima imamo

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = -K\vec{t} + \tau\vec{b} \quad \text{primamo da je}$$

$$(-k\vec{t} + c\vec{h}) \cdot \vec{a} = 0,$$

$$-k\vec{t} \cdot \vec{a} = -c\vec{h} \cdot \vec{a}$$

$$\frac{k}{c} = \frac{\vec{h} \cdot \vec{a}}{\vec{t} \cdot \vec{a}}$$

Kuko je  $\vec{t} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$  to je

$$\vec{t} \cdot \vec{a} = |\vec{t}| |\vec{a}| \cos \alpha = 1 \cdot a \cdot \cos \alpha = a^2 \quad (\text{ako stavimo } |\vec{a}| = a)$$

tj.  $\cos \alpha = a.$

$$|z \quad \vec{h} \cdot \vec{a} = |\vec{h}| |\vec{a}| \cos \beta = 1 \cdot a \cos \beta = a \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$

$$= a \left( \cos \frac{\pi}{2} \cos \alpha + \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_{=1} \sin \alpha \right) = \left| \begin{array}{l} \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \\ \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - a^2} \end{array} \right|$$

$$= a \sqrt{1 - a^2}$$

sljedi:  $\frac{k}{c} = \frac{a \sqrt{1 - a^2}}{a^2}$

$$\frac{k}{c} = \frac{\sqrt{1 - a^2}}{a}$$

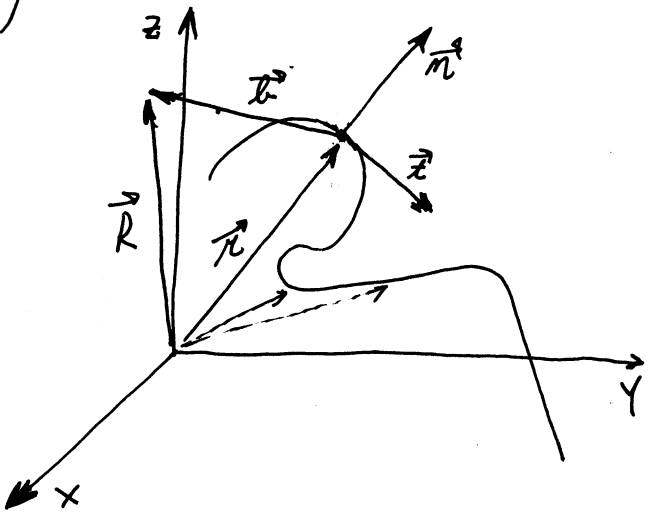
traženi  
odnos

⊕ Na binormali: krive  $\vec{r} = \vec{r}(s)$  konstantne torzije naznači se odsječak date dužine  $l$  čiji je jedan kraj na krivoj. Drugi kraj odsječka opisuje krivu  $\vec{R} = \vec{R}(s)$  kad se  $s$  mijenja.

a) Razložiti vektor binormalne krive  $\vec{R} = \vec{R}(s)$  po pravcima ortova prirodnoy trieda date krive.

b) Odrediti ugao između binormala krivih koje odgovaraju određenom  $s$ .

Rj. Nekusu  $\vec{t}, \vec{n}$  i  $\vec{b}$  pravci ortova prirodnoy trieda. Jedan kraj dužine  $l$  je na krivoj  $\vec{r} = \vec{r}(s)$ . Vektor položaja drugoy kraja dužine  $l$  (vidi sliku) bit će



$$\vec{R} = \vec{r}(s) + l \vec{b}(s).$$

a) Za krivu  $\vec{R} = \vec{R}(s)$ ,  $s$  ne mora biti dužina luka, pa njen vektor binormalne  $\vec{b}_1 = \dot{\vec{R}} \times \ddot{\vec{R}}$ , nije obavezno jedinični.

Primjenjujući Frenetove oblike i vodeći računa o tome da je  $\tau = \text{const.}$  izračunajmo  $\dot{\vec{R}}$  i  $\ddot{\vec{R}}$ .

$$\vec{R} = \vec{r}(s) + l \vec{b}$$

$$\dot{\vec{R}} = \frac{d\vec{r}}{ds} + l \left( \frac{d\vec{b}}{ds} \right) = \vec{t} + l(-\tau \vec{n}), \quad \text{gdje je } -\tau = \frac{1}{T}$$

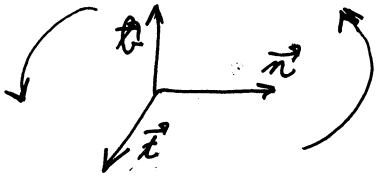
$$\ddot{\vec{R}} = \frac{d\vec{t}}{ds} - l\tau \left( \frac{d\vec{n}}{ds} \right) = k \vec{n} - l\tau(-k \vec{t} + \tau \vec{b})$$

$$\vec{t}_1 = \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = (\vec{r} - l\tau \vec{n}) \times (k\tau l \vec{t} + k\vec{n} - l\tau^2 \vec{t})$$

$$= -k\tau^2 l^2 (\vec{n} \times \vec{t}) + k(\vec{t} \times \vec{n}) - l\tau^2 (\vec{t} \times \vec{t}) + l^2 \tau^3 (\vec{n} \times \vec{t})$$

$$= \begin{cases} \vec{t} \times \vec{n} = \vec{t} \\ \vec{n} \times \vec{t} = -\vec{t} \\ \vec{n} \times \vec{t} = \vec{t} \\ \vec{t} \times \vec{t} = \vec{n} \end{cases} = l^2 \tau^3 \vec{t} + k(1 + l^2 \tau^2) \vec{t} + l\tau^2 \vec{n}$$

tine smo  $\vec{t}_1$  razložili  
na komponente u  
smjeru vektora  $\vec{t}, \vec{n}, \vec{t}$ .



$$\begin{aligned} \vec{t} \times \vec{n} &= \vec{t} \\ \vec{n} \times \vec{t} &= -\vec{t} \\ \vec{t} \times \vec{t} &= \vec{n} \end{aligned}$$

b) Ugađ između binormala bude

$$\cos \varphi = \frac{\vec{t}_1 \cdot \vec{t}}{|\vec{t}_1| |\vec{t}|} = \frac{k(1 + l^2 \tau^2)}{\sqrt{(l^2 \tau^3)^2 + k^2 (1 + l^2 \tau^2)^2 + (l\tau^2)^2}} =$$

$$\left[ \begin{aligned} \vec{t}_1 &= l^2 \tau^3 \vec{t} + k(1 + l^2 \tau^2) \vec{t} + l\tau^2 \vec{n} \\ \vec{t} &= \vec{t} \end{aligned} \right]$$

$$= \frac{k(1 + l^2 \tau^2)}{\sqrt{l^4 \tau^6 + k^2 (1 + 2l^2 \tau^2 + l^4 \tau^4) + l^2 \tau^4}} =$$

$$= \frac{k(1 + l^2 \tau^2)}{\sqrt{l^2 \tau^4 (l^2 \tau^2 + 1) + k^2 (1 + l^2 \tau^2)^2}} = \frac{k \sqrt{1 + l^2 \tau^2}}{\sqrt{l^2 \tau^4 + k^2 (1 + l^2 \tau^2)}}$$

traženi ugađ



(#) Data je kriva  $\vec{r} = \vec{r}(s)$ . Razložiti vektor  $\frac{d^3 \vec{r}}{ds^3}$  po pravcima ortova prirodnoj trijedru.

$R_1$ : Jedinичne vektore  $\vec{t}_0, \vec{n}_0, \vec{b}_0$  označimo sa  $\vec{t}, \vec{n}$  i  $\vec{b}$ . Kako je  $\frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} = k \vec{n}$

$$\text{(zato što je } \frac{d\vec{t}}{ds} = k \vec{n} \Rightarrow \frac{d}{ds} \left( \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = k \vec{n} \text{)}$$

gdje je  $k$  krivina krive to je

$$\frac{d^3 \vec{r}}{ds^3} = \frac{dk}{ds} \vec{n} + k \frac{d\vec{n}}{ds}$$

Koristimo Frenetove obrasce  $\left( \frac{d\vec{n}}{ds} = -k \vec{t} + \tau \vec{b} \right)$ , gdje je  $\tau = -\frac{1}{T}$  torzija), pa će biti

$$\frac{d^3 \vec{r}}{ds^3} = \frac{dk}{ds} \vec{n} + k(-k \vec{t} + \tau \vec{b})$$

$$\frac{d^3 \vec{r}}{ds^3} = -k^2 \vec{t} + \frac{dk}{ds} \vec{n} + k\tau \vec{b}$$

traženo rješenje

⊕ Neka je  $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$  prirodni triedar krive  $\vec{r}$  parametrizovane dužinom luka ( $\vec{r} = \vec{r}(s)$ ), gdje su  $\vec{t}$ ,  $\vec{n}$  i  $\vec{b}$  jedinični vektori. Definićimo polje  $S$  sa  $S \stackrel{\text{def}}{=} \tau \vec{t} + \kappa \vec{b}$  gdje su  $\kappa$  i  $-\tau$  krivina i torzija krive  $\vec{r}$ . Izračunati

$$\frac{d\vec{t}}{ds} - S \times \vec{t}, \quad \frac{d\vec{n}}{ds} - S \times \vec{n} \quad ; \quad \frac{d\vec{b}}{ds} - S \times \vec{b}.$$

Šta možemo zaključiti na osnovu dobijenog rezultata.

Rj.

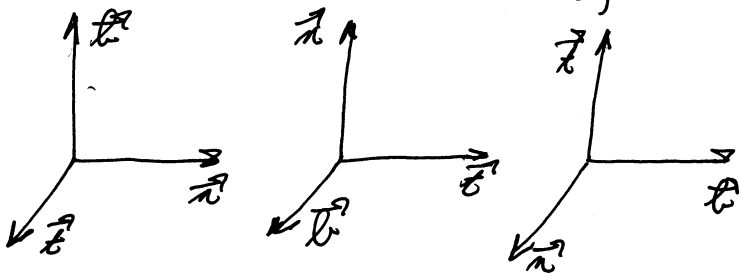
Frenetovi obrasci za krivu  $\vec{r} = \vec{r}(s)$  su

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \kappa \vec{n}, \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = \tau \vec{b} - \kappa \vec{t}, \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = -\tau \vec{n} \quad \text{gdje su}$$

$\vec{t}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{n}$  jedinični vektori.

... (1)

Prvo izračunajmo  $S \times \vec{t}$ ,  $S \times \vec{n}$ ,  $S \times \vec{b}$ .



$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$$

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}$$

$$\vec{t} = \vec{n} \times \vec{b}$$

$$S \times \vec{t} = (\tau \vec{t} + \kappa \vec{b}) \times \vec{t} = \tau (\vec{t} \times \vec{t}) + \kappa (\vec{b} \times \vec{t}) = \kappa \vec{n}$$

$$S \times \vec{n} = (\tau \vec{t} + \kappa \vec{b}) \times \vec{n} = \tau (\vec{t} \times \vec{n}) + \kappa (\vec{b} \times \vec{n}) = \tau \vec{b} - \kappa \vec{t}$$

$$S \times \vec{b} = (\tau \vec{t} + \kappa \vec{b}) \times \vec{b} = \tau (\vec{t} \times \vec{b}) + \kappa (\vec{b} \times \vec{b}) = -\tau \vec{n}$$

... (2)

Sada iz (1) i (2) možemo zaključiti da je

$$\frac{d\vec{t}}{ds} - S \times \vec{t} = 0, \quad \frac{d\vec{n}}{ds} - S \times \vec{n} = 0 \quad ; \quad \frac{d\vec{b}}{ds} - S \times \vec{b} = 0.$$

Na osnovu dobijenog rezultata možemo zaključiti da su Frenetove jednačine za  $\frac{d\vec{t}}{ds}$ ,  $\frac{d\vec{n}}{ds}$  i  $\frac{d\vec{b}}{ds}$  ekvivalentne jednačinama  $S \times \vec{t}$ ,  $S \times \vec{n}$  i  $S \times \vec{b}$ .

#) Naci vektor  $\vec{A}(s)$  koji zadovoljava uslove

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \vec{A} \times \vec{t}, \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = \vec{A} \times \vec{n},$$

gdje je  $s$  luk krive  $\vec{r} = \vec{r}(s)$  a  $\vec{t}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{b}$  ort tangente, normale i binormale te krive, respektivno.

kj. Vektor  $\vec{A}(s)$  možemo razložiti u pravcima vektora  $\vec{t}$ ,  $\vec{n}$  i  $\vec{b}$ :  $\vec{A}(s) = \alpha \vec{t} + \beta \vec{n} + \gamma \vec{b}$ .

Prema Freneovim oblicima

$$K \vec{n} = \frac{d\vec{t}}{ds} \quad \begin{array}{l} \text{prema zadatku} \\ \Rightarrow \end{array} \quad K \vec{n} = \vec{A}(s) \times \vec{t}$$

$$\Rightarrow K \vec{n} = (\alpha \vec{t} + \beta \vec{n} + \gamma \vec{b}) \times \vec{t} \quad \dots (*)$$

Dalje,  $\frac{d\vec{n}}{ds} = -K \vec{t} + \tau \vec{b}$  pa je iz uslova zadatka

$$-K \vec{t} + \tau \vec{b} = (\alpha \vec{t} + \beta \vec{n} + \gamma \vec{b}) \times \vec{n} \quad \dots (**)$$

Prema tome

$$\begin{aligned} (*) \Rightarrow K \vec{n} &= \alpha \vec{t} \times \vec{t} + \beta \vec{n} \times \vec{t} + \gamma \vec{b} \times \vec{t} = \beta (-\vec{b}) + \gamma \vec{n} \\ &= -\beta \vec{b} + \gamma \vec{n} \quad \Rightarrow \quad \beta = 0, \quad \gamma = K; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (**) \Rightarrow -K \vec{t} + \tau \vec{b} &= (\alpha \vec{t} + K \vec{b}) \times \vec{n} = \alpha \vec{t} \times \vec{n} + K \vec{b} \times \vec{n} \\ &= \alpha \vec{b} - K \vec{t} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \tau \end{aligned}$$

Prema tome  $\vec{A}(s) = \tau \vec{t} + K \vec{b}$ .

Tačka  $M$ , vektori  $\vec{t}$  i  $\vec{n}$  određuju oskulatornu ravan,  $M, \vec{b}$  i  $\vec{n}$  normalnu ravan, a  $M, \vec{b}$  i  $\vec{t}$  rektifikacionu ravan krive u tački  $M$  krive.

Poluprečnik krivine  $R$  i krivina  $K$  su određeni relacijama

$$\frac{1}{K^2} = R^2 = \frac{|\dot{\vec{r}}|^3}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2} \quad \text{tj.} \quad R = \frac{|\dot{\vec{t}}|^3}{|\dot{\vec{b}}|}$$

Poluprečnik torzije,  $\pm T$ , je dat formulom:

$$T = - \frac{[\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}]^2}{\dot{\vec{r}} [\ddot{\vec{r}} \times \dddot{\vec{r}}]} = \frac{[\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}]^2}{\ddot{\vec{r}} [\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}]} = \frac{|\dot{\vec{b}}|^2}{\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{b}}}$$

Torziju ćemo označiti sa  $\frac{1}{T}$ . Ako je u jednačini krive parametar  $t$  jednak dužini luka  $s$ , tada je

$$\kappa = K = \frac{1}{R} = \left| \frac{d^2 \vec{r}}{ds^2} \right| = |\vec{r}''|$$

$$-\tau = \frac{1}{T} = \pm \left| \frac{d\vec{b}_0}{ds} \right|$$

$$K = \frac{|\dot{\vec{t}} \times \ddot{\vec{t}}|}{|\dot{\vec{t}}|^3}$$

Frenetovi obrasci glase:

$$\frac{d\vec{t}_0}{ds} = \frac{\vec{n}_0}{R}, \quad \frac{d\vec{t}_0}{ds} = K \vec{n}_0$$

$$\frac{d\vec{n}_0}{ds} = -\frac{\vec{t}_0}{R} - \frac{\vec{b}_0}{T}, \quad \frac{d\vec{n}_0}{ds} = -K \vec{t}_0 + \tau \vec{b}_0$$

$$\frac{d\vec{b}_0}{ds} = \frac{\vec{n}_0}{T}, \quad \frac{d\vec{b}_0}{ds} = -\tau \vec{n}_0$$

Obvojnica familije ravnih krivih  $F(x, y, a) = 0$  se dobije eliminisanjem parametra  $a$  iz jednačine

$$\frac{\partial F(x, y, a)}{\partial a} = 0, \quad F(x, y, a) = 0$$